Fluidodinâmica

Carlos Marlon Santos

Fluidodinâmica

- Os fluidos podem ser analisados utilizando-se o conceito de **sistema** ou de **volume** de controle
  - O **sistema** é definido quando uma certa quantidade de matéria encontra-se em estudo
  - **Volume de controle** é definido como uma região do espaço através da qual a massa pode escoar

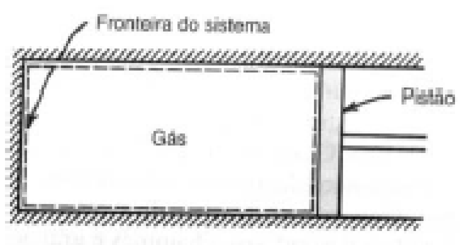
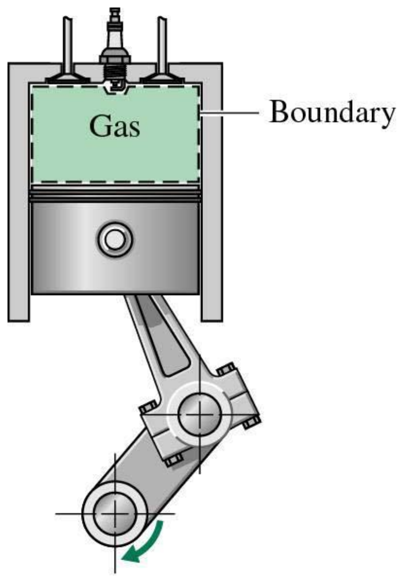
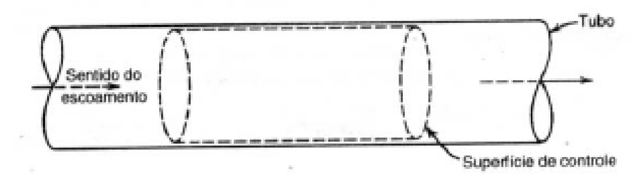
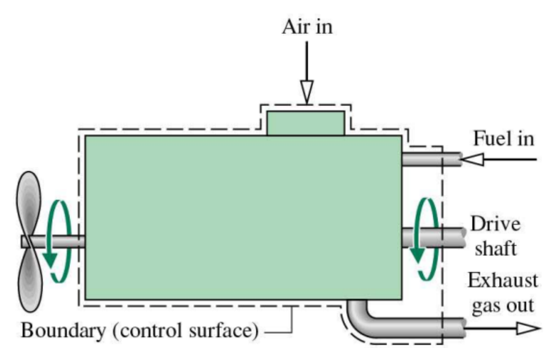


Figura 27 – Conjunto Pistão-Cilindro.







Fluidodinâmica

- As leis da Mecânica são escritas para um **sistema**;
- Elas estabelecem o que ocorre quando há uma interação entre o sistema e suas **vizinhanças**
  - **Vizinhança** é tudo o que é externo ao sistema;
- Muitos problemas de Mecânica dos Fluidos, é mais comum a análise dos problemas utilizando-se a formulação de **volume de controle**.
- O teorema de Transporte de Reynolds permite que as leis da Mecânica sejam escritas para um volume de controle

Teorema de Transporte de Reynolds

O teorema de transporte de **Reynolds** é uma ferramenta analítica que nos **permite** uma **ligação** entre os conceitos de **sistema** e de **volume de controle**:

Conceitos Gerais:

$$B = mb$$

B = Qualquer propriedade de um fluido
m = a massa = $\rho\,\forall$
b = a quantidade da propriedade por unidade de massa

B = uma propriedade **extensiva** (depende do tamanho, quantidade de material. Massa, volume, entropia, calor, energia...)

b = uma propriedade **intensiva** (não dependem do tamanho ou quantidade de material, p.e. temperatura, pressão, densidade, viscosidade).

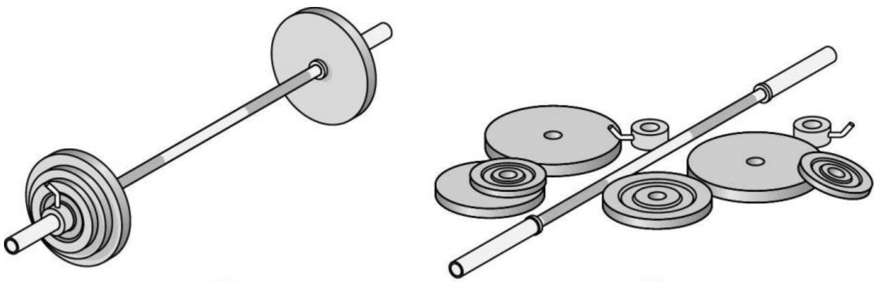
B é diretamente proporcional a massa e **b** é independente da massa

Exemplos:

Massa	b = 1	$B = m$
Energia Cinética	b = $V^2/2$	$B = mV^2/2$
Momento	b = **V (vetor)**	$\mathbf{B} = m\mathbf{V}$

Transporte de Reynolds

- Uma **propriedade é extensiva** se o seu valor para um sistema é a **soma** de todas as partes que o compõem
- Uma **propriedade intensiva** é aquela que **varia** ao longo do sistema em determinado momento.



(a)   (b)

A massa total é a soma das massas das partes

A temperatura é a mesma para cada parte

Teorema de Transporte de Reynolds: Interpretação Física

$$\underset{(1)}{\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt}} = \underset{(2)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b \, d\forall} + \underset{(3)}{\int_{\text{cs}} \rho b \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}$$

(1) Taxa de variação **temporal** de um parâmetro **extensivo** num **sistema** (massa, momento, energia).

(2) Taxa de variação temporal de B no **volume de controle**

(3) A **vazão** líquida do **parâmetro B** através de **toda a superfície** de controle. Note que

$(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0)$ a propriedade é transportada para fora da superfície

$(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0)$ a propriedade é transportada para dentro da superfície

$b\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ não há fluxo através da superfície

$b = 0$ ou $\mathbf{V} = 0$ ou $\mathbf{V}$ é paralelo a superfície

Conservação da Massa – A equação da continuidade

Aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds ao caso ilustrado:

$$\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho b \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

Com b = 1 para a massa e num volume de controle fixo e não-deformável, temos

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}$$

Taxa de variação temporal do sistema da massa coincidente

Taxa de variação da massa contida no volume de controle coincidente

Vazão líquida de massa através da superfície de controle

Conservação da Massa – A equação da continuidade

Lembrando que $$\frac{DM_{\text{sys}}}{Dt} = 0$$ então…

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0}$$

A soma da taxa de variação temporal da massa no volume de controle com a vazão líquida de massa na superfície de controle deve ser nula para que a massa seja conservada.

Escoamento permanente

Quando o regime de escoamento é **permantente**, todas as propriedades no campo de escoamento são **constantes:**

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho \, d\forall = 0$$

Conservação da Massa – A equação da continuidade

A **vazão líquida de massa** no VC é obtida integrando todas as contribuições diferenciais que existem na **superfície de controle**.

Assim $$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \sum \dot{m}_{\text{out}} - \sum \dot{m}_{\text{in}} = 0$$

Então,

$$\sum \dot{m}_{\text{in}} = \sum \dot{m}_{\text{out}}$$

Somatória das vazões de entrada = Somatória das vazões de saída = massa conservada!!!

que é válida para escoamentos que apresentam várias seções de entrada e saída em escoamentos permanentes.

Como $\dot{m} = \rho Q = \rho A V$, se o escoamento for incompressível (ρ **constante**), temos que a **vazão em volume** pode ser escrita como

$$\sum Q_e = \sum Q_s$$

Conservação da Massa – A equação da continuidade

Para escoamentos permanentes com apenas uma entrada e uma saída, a vazão em massa é dada por:

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$$

Se o escoamento for permanente e o fluido incompressível, a vazão em volume é dada por

$$Q = A_1 \overline{V}_1 = A_2 \overline{V}_2$$

Escoamento Transitório

Se o regime de escoamento do fluido for transitório

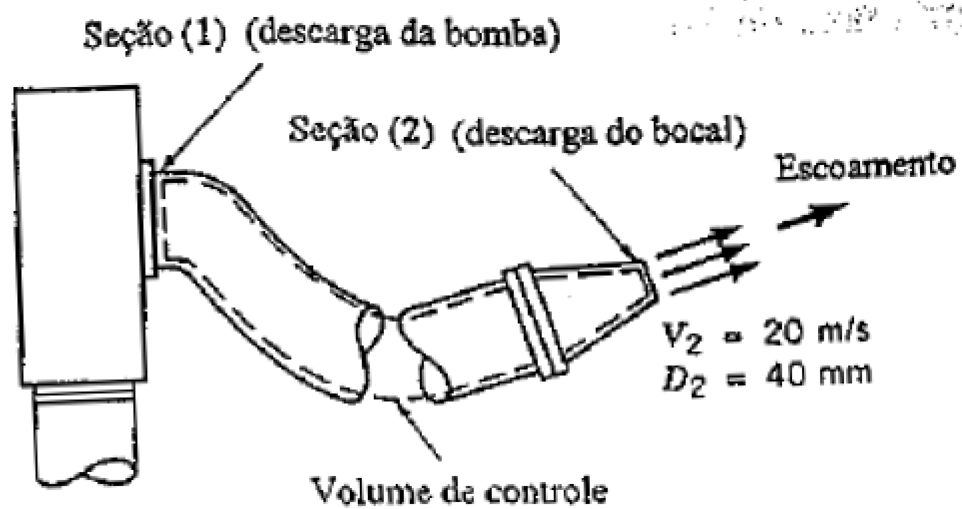
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathrm{cv}} \rho \, d\forall \neq \mathbf{0}$$

a variação temporal da massa total no volume de controle é diferente de zero.

Se o valor da integral for: (+) significa que a massa no VC aumenta com o tempo
(-) significa que a massa no VC diminui com o tempo

Exemplo 5.1 -

Agua do mar escoa em regime **permanente** no bocal cônico mostrado na figura. O bocal está instalado numa mangueira e esta é alimentada por uma bomba. Qual deve ser a **vazão em volume** da bomba para que a velocidade da seção de descarga do bocal seja 20 m/s?



Solução? Aplique esta equação!!!

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{cv}} \rho \, d\mathcal{V}} + \int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0}$$

0
escoamento
permanente!

Conservação da Massa – A equação da continuidade

Exemplo 5.1 -

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} = 0$$

Como só há vazão na descarga da bomba (1) e na descarga do bocal (2)

$$\int_{sc} \rho V . \hat{n}\, dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_2 = \dot{m}_1$$

Sabendo que $\dot{m} = \rho Q$ temos

$$\rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1$$

Admitindo que o escoamento é incompressível, $\rho_2 = \rho_1$ e

$$Q_1 = Q_2 = V_2 A_2 = V_2 \pi R_2^2$$

Agora é só fazer a continha...

Equação da Continuidade

- A equação da continuidade relaciona a vazão em massa na entrada e na saída de um sistema.

$$Q_{m1} = Q_{m2} \quad \longrightarrow \quad \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$

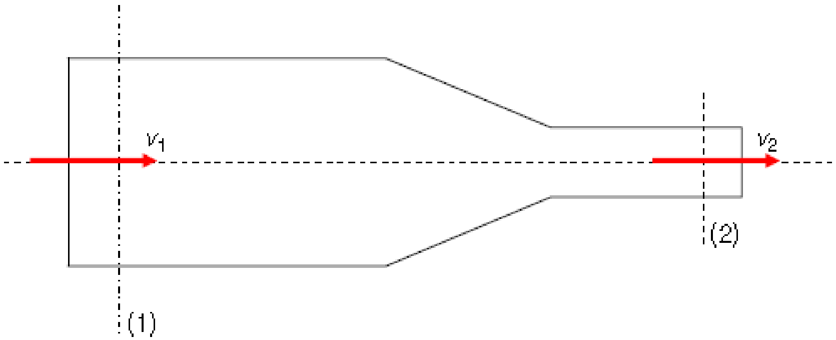
- Para o caso de fluido incompressível, a massa específica é a mesma tanto na entrada quanto na saída, portanto:

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \longrightarrow \quad v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

- A equação apresentada mostra que as velocidades são inversamente proporcionais as áreas, ou seja, uma redução de área corresponde a um aumento de velocidade e vice-versa.

Exercício 1

- 1) Para a tubulação mostrada na figura, calcule a vazão em massa, em peso e em volume e determine a velocidade na seção (2) sabendo-se que $A_1 = 10cm^2$ e $A_2 = 5cm^2$.
- Dados: $\rho = 1000kg/m^3$ e $v_1 = 1m/s$.



Aplicação da Equação da Continuidade entre os pontos (1) e (2).

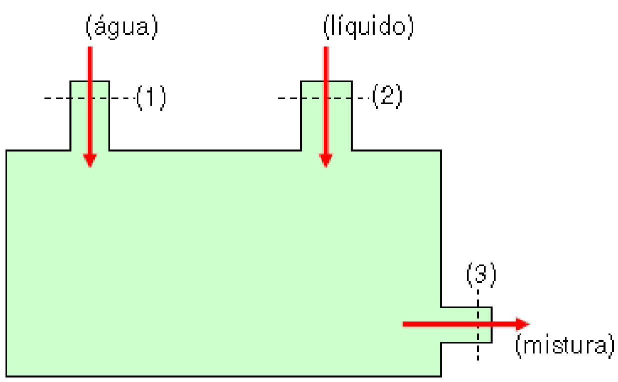
$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

$$1 \cdot 10 = v_2 \cdot 5$$

$$v_2 = \frac{10}{5}$$

$$v_2 = 2 \text{ m/s}$$

2) Um tubo despeja água em um reservatório com uma vazão de 20 l/s e um outro tubo despeja um líquido de massa específica igual a 800kg/m³ com uma vazão de 10 l/s. A mistura formada é descarregada por um tubo da área igual a 30cm². Determinar a massa específica da mistura no tubo de descarga e calcule também qual é a velocidade de saída.



Equação da continuidade:

$$Q_{m1} + Q_{m2} = Q_{m3}$$

$$(\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1) + (\rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2) = (\rho_3 \cdot v_3 \cdot A_3)$$

Vazão volumétrica:

$$Q_v = v \cdot A$$

Pode-se escrever que:

$$(\rho_1 \cdot Q_{v1}) + (\rho_2 \cdot Q_{v2}) = (\rho_3 \cdot Q_{v3})$$

Vazão volumétrica (entrada):

$$Q_{v1} = 0{,}02\ \mathrm{m^3}$$

$$Q_{v2} = 0{,}01\mathrm{m^3}$$

Vazão volumétrica (saída):

$$Q_{v1} + Q_{v2} = Q_{v3}$$

$$0{,}02 + 0{,}01 = Q_{v3}$$

$$Q_{v3} = 0{,}03\mathrm{m^3}$$

Massa específica (mistura):

$$(\rho_1 \cdot Q_{v1}) + (\rho_2 \cdot Q_{v2}) = (\rho_3 \cdot Q_{v3})$$

$$(1000 \cdot 0{,}02) + (800 \cdot 0{,}01) = (\rho_3 \cdot 0{,}03)$$

$$\rho_3 = \frac{(1000 \cdot 0{,}02) + (800 \cdot 0{,}01)}{0{,}03}$$

$$\rho_3 = \frac{20 + 8}{0{,}03}$$

$$\rho_3 = \frac{28}{0{,}03}$$

$$\rho_3 = 933{,}33\ \mathrm{kg/m^3}$$

1) Água é descarregada de um tanque cúbico com 3m de aresta por um tubo de 3cm de diâmetro. A vazão no tubo é de 7 l/s. Determine a velocidade de descida da superfície livre da água do tanque e calcule quanto tempo o nível da água levará para descer 15cm. Calcule também a velocidade de descida da água na tubulação.

Segunda Lei de Newton –
A Equações da Quantidade de Movimento Linear

Segunda Lei de Newton – Quantidade de Movimento Linear

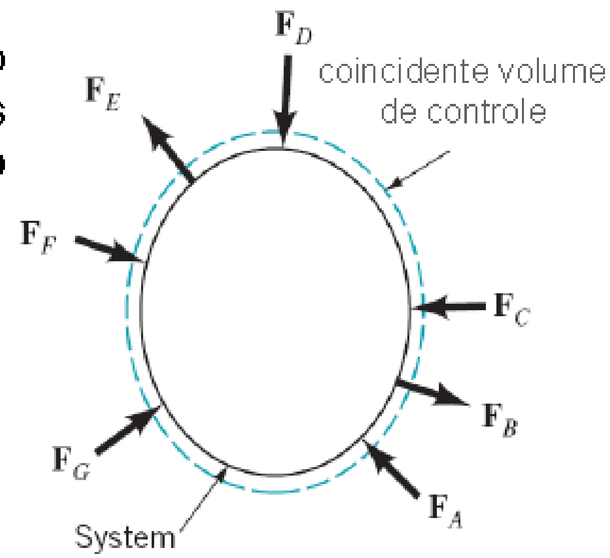
A segunda Lei de Newton para um sistema estabelece que

taxa de variação temporal da quantidade de movimento do sistema	=	soma das forças externas que atuam no sistema

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} \mathbf{V}\rho \, d\forall = \sum \mathbf{F}_{sys}$$

Quando o **volume de controle** é coincidente com o **sistema**, as **forças** que atuam no sistema e as forças que atuam no conteúdo do volume de controle **são idênticas**

$$\sum F_{sis} = \sum F_{\substack{\text{conteúdo do volume de}\\ \text{controle coincidente}}}$$



Segunda Lei de Newton – As equação da continuidade

Lembrando do TTR,

$$\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b \, d\forall + \int_{\text{cs}} \rho b \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

temos que a aplicação deste no sistema e no conteudo do volume de controle, com b = **V**, and B = quantidade de movimento fornece

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}$$

taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do sistema

taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do conteúdo do VC

fluxo líquido de quantidade de movimento linear através da superfície de controle

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho \, d\forall = \sum \mathbf{F}_{\text{sys}}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \mathbf{V}\rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \mathbf{V}\rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} \mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

Combinando as duas

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V\rho d\forall + \int_{CS} V\rho V \cdot \hat{n} dA = \sum F_{\substack{\text{conteúdo do volume}\\ \text{de controle}}}$$

que é a equação da quantidade de movimento linear, ou seja, uma formulação matemática da segunda lei de Newton para volumes de controle fixos e indeformáveis. .

Nesta equação,

- As forças que atuam no conteúdo do volume de controle são as de campo e as forças superfíciais.
- A equação é vetorial. O momento linear tem direção e sentido (***V*** é vetor!!!) .
- Se o fluxo é estacionário, a taxa de variação temporal do momento é zero..

Se o escoamento é **permanente e unidimensional,**

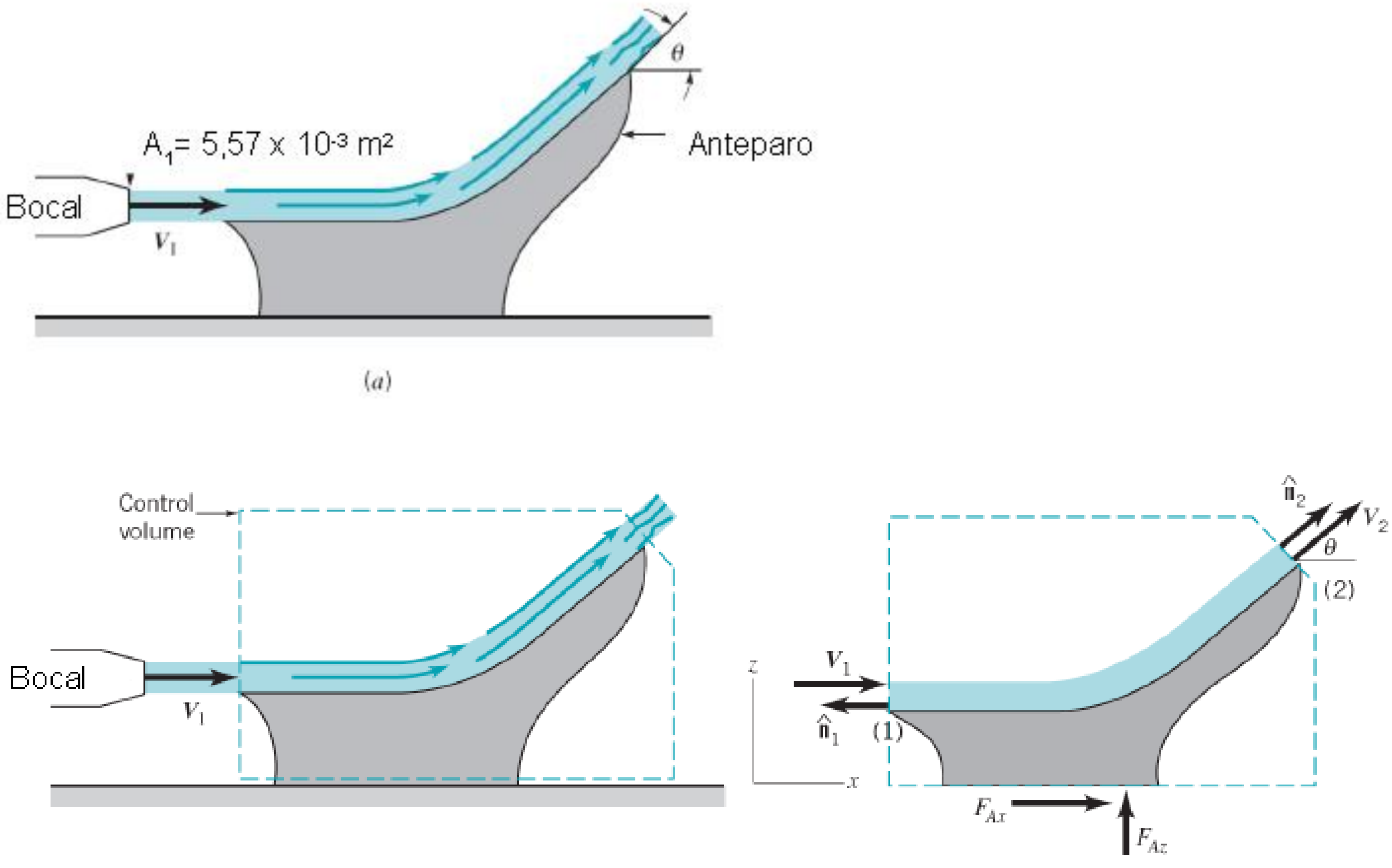
$$\sum \vec{F} = \sum_{s} \left[\vec{V}_s \dot{m}_s \right] - \sum_{e} \left[\vec{V}_e \dot{m}_e \right]$$

Onde

$\dot{m}_s$ e $\dot{m}_e$ são os fuxos em massa (ρVA) na saida e entrada do V.C.,

Exemplo:

A Fig. E5.10*a* mostra um jato d'água horizontal incidindo num anteparo estacionário. O jato é descarregado do bocal com velocidade uniforme e igual a 3,0 m/s. O ângulo entre o escoamento de água, na seção de descarga do anteparo, e a horizontal é θ. Admitindo que os efeitos gravitacionais e viscosos são desprezíveis, determine a força necessária para manter o anteparo imóvel.



(a) (b) (c)

Aplicando a equação **abaixo** nas direções **x e z**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} V\rho V\cdot\hat{n}dA = \sum F_{\text{conteúdo do volume de controle}}} \qquad \text{Eq. (1)}$$

teremos que

$$\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} u\,\rho\, d\mathcal{V}} + \int_{sc} u\,\rho\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum \mathbf{F}_x$$

$$\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} w\,\rho\, d\mathcal{V}} + \int_{sc} w\,\rho\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum \mathbf{F}_z$$

como o escoamento é permanente, os termos da variação temporal são nulos. A velocidade $\boldsymbol{V} = u\boldsymbol{i} + w\boldsymbol{k}$

- na seção de alimentação (1) temos que **V.n** = -V, $u = -V_1$, $w = 0$

- na seção de descarga (2) **V.n** = V , $u = -V_1 \cos\theta$ e $w = V_1\,\text{sen}\theta$

Lembrando que $\boldsymbol{V} = u\boldsymbol{i} + w\boldsymbol{k}$ e substituindo na equação (1), teremos que

$$V_1\,\rho\,(-V_1)\,A_1 + V_1\cos\theta\,\rho\,(V_1)\,A_2 = F_{Ax}$$

$$(0)\,\rho\,(-V_1)\,A_1 + V_1\,\mathrm{sen}\,\theta\,\rho\,(V_1)\,A_2 = F_{Az}$$

Se assumirmos que o escoamento é incompressível, teremos que

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

pois a massa deve ser conservada

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$$

Como V_1 = V2, temos que

$$A_1 = A_2$$

ou seja

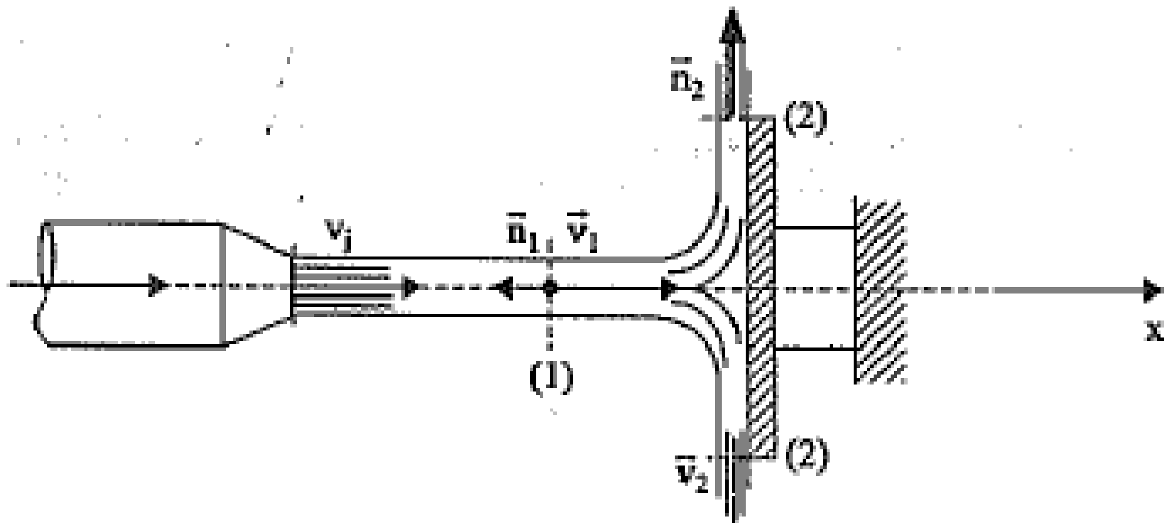
$$F_{Ax} = -\rho\,A_1\,V_1^2 + \rho\,A_1\,V_1^2\cos\theta = -\rho\,A_1\,V_1^2\,(1-\cos\theta)$$

$$F_{Az} = \rho\,A_1\,V_1^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Faça as considerações para:

$\theta = 0$, $\theta = 90$, $\theta = 180$

Aplicação 4 — Jato incidindo numa placa plana

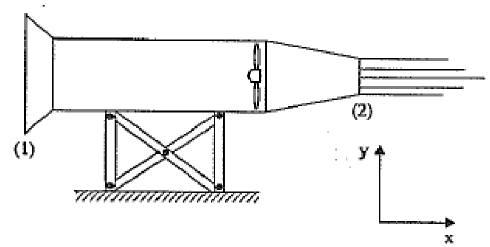


Considere que o jato, ao atingir o anteparo, seja espalhado uniformemente, em todas as direções. A velocidade v_2 não terá, portanto, componente segundo x. Como a pressão é atmosférica, obtém-se:

$$F_{s_x} = \rho Q v_1$$

Exercícios

5.1 Calcular o esforço horizontal sobre a estrutura do ventilador da figura e a potência transmitida ao fluido pelo mesmo. Desprezar a perda de carga entre as seções (1) e (2). Dados: $D_2 = 0{,}38$ m; $v_2 = 30$ m/s; $\gamma = 12{,}7$ N/m^3; $v_1 \cong 0$.



$$\vec{F}_s = -\left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_m \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)\right]$$

Na escala efetiva $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ e é dado do enunciado que $v_1 = 0$.

$$\vec{F}_s = -Q_m \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad \text{Segundo } x: \quad F_{s_x} = -\rho v_2^2 A_2$$

$$F_{s_x} = \frac{\gamma}{g} v_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} = -\frac{12{,}7}{9{,}8} \times 30^2 \times \frac{\pi \times 0{,}35^2}{4} = 132{,}3\,\text{N}$$

$$H_1 + H_B = H_2 + H_{p_{1,2}}$$

$$H_B = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \times 9{,}8} = 46\,\text{m}$$

$$Q = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 30 \times \frac{\pi \times 0{,}38^2}{4} = 3{,}4\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$N = \gamma Q H_B = 12{,}7 \times 3{,}4 \times 46 \times \frac{1}{1000} = 1{,}99\,\text{kW}$$

Equação da energia

1 lei da termodinâmica para sistema :

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}\Big|_{sist.} = \frac{dE}{dt}\Big|_{sist.}}$$

***Q** : é a taxa de transferência de calor trocada entre o sistema e a vizinhança.* taxa de calor é **<u>positiva quando o calor é adicionado ao sistema.</u>**

W : é a taxa de trabalho realizada pelo sistema sobre o meio é convencionada positiva.

E: é a energia total do sistema, dada por:

$$\boxed{E = \int_{M(sistema)} e\,dm = \int_{\forall(sistema)} e\rho\,d\forall}$$

e = é a energia intensiva, dada pela soma entre a **energia interna**, a **energia cinética** e a **energia potencial** do sistema (por unidade de massa).

A energia e (por unidade de massa), pode ser escrita como

$$e = \underbrace{\breve{u}}_{\text{Energia Interna}} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{Energia Cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{Energia Potencial}}$$

Aplicando teorema de Reynolds

Teorema de Transporte de Reynolds: Interpretação Física

$$\underset{(1)}{\frac{DB_{\text{sys}}}{Dt}} = \underset{(2)}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} \rho b \, d\forall} + \underset{(3)}{\int_{\text{cs}} \rho b \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}$$

A equação da Energia: Primeira Lei da Termodinâmica

A aplicação do Teorema de transporte de Reynolds, com b = **e**,

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} e\rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{cv}} e\rho \, d\forall + \int_{\text{cs}} e\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA}$$

taxa de variação temporal da energia total do sistema

taxa de variação temporal da energia total do conteúdo do VC

fluxo líquido de energia total na superfície de controle

UNIJORGE
CENTRO UNIVERSITÁRIO JORGE AMADO

A equação da Energia: Primeira Lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica para um sistema estabelece que

Taxa de variação temporal da energia total do sistema	=	Taxa líquida de transferência de calor para o sistema	+	Taxa de realização de trabalho (potência transferida ao sistema)

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys} e\rho \, d\forall = \left(\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out}\right)_{sys} + \left(\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out}\right)_{sys}$$

Energia **Taxa transf. Calor** **Taxa do trabalho W**

$$\frac{D}{Dt}\int_{sis} e\rho d\forall = (\dot{Q}_{liq.e} - \dot{W}_{liq.e})_{sis}$$

A equação da Energia: Primeira Lei da Termodinâmica

A equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} e\rho d\forall + \int_{cs} e\rho V \cdot \hat{n}\, dA = (\dot{Q}_{liq.e} \overset{-}{+} \dot{W}_{liq.e})_{cv}$$

A taxa de calor (Q ponto) representa as interações do conteúdo do volume de controle com o meio devida as diferenças de temperatura.
Em um processo adiabático, Q ponto é zero.

$$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cisal} + \dot{W}_{outros}$$

$$\dot{W}_{normal} = \int_{SC} p\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \left(\dot{W}_{eixo} + \int_{SC} p\vec{V} \bullet d\vec{A} + \dot{W}_{cisal} + \dot{W}_{outros}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\rho d\forall + \int_{SC} e\rho\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

$$\dot{Q}-\left(\dot{W}_{eixo}+\int_{SC} p\vec{V}\bullet d\vec{A}+\dot{W}_{cisal}+\dot{W}_{outros}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\rho d\forall+\int_{SC} e\rho\vec{V}\bullet d\vec{A}$$

$$\dot{Q}-\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\rho d\forall+\int_{SC}(e\rho+p)\vec{V}\bullet d\vec{A}$$

$$\dot{Q}-\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} e\rho d\forall+\int_{SC}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}+gz+u+p\,\upsilon\right)\rho\vec{V}\bullet d\vec{A}$$

Sendo: $\upsilon=\frac{1}{\rho}$

Adotando-se as hipóteses de escoamento **em regime permanente**, sem outras formas de trabalho realizadas (W = Weixo), a equação se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int e\,\rho d\forall = 0$$

A Equação da continuidade $\frac{\partial m}{\partial t}=\dot{m}_e-\dot{m}_s$

$$\dot{m}_e-\dot{m}_s$$

Temos : $$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{SC} \left(\frac{\overline{V}^2}{2} + gz + u + p\,\upsilon \right) \rho \vec{V} \bullet d\vec{A}$$

Chamando a entrada da tubulação de (1) e a saída da tubulação de (2), e considerando que, em uma dada seção, a energia interna (u), a pressão e a distância vertical (z) não se alteram, a equação pode ser dada por:

α: é o fator de correção da energia cinética:

Para escoamento em regime turbulento, α ≈ 1
Para escoamento em regime laminar, α = 2.

$$\dot{Q} - \dot{W} = -\rho_1 V_1 A_1 \left(u_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + pv_1 \right) + \rho_2 V_2 A_2 \left(u_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + pv_2 \right)$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left((u_2 - u_1) + \alpha \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) + P_2 v_2 - P_2 v_1 \right)$$

$$\left(\alpha \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + pv_1 \right) - \left(\alpha \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + p_2 v_2 \right) = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} + (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

representa a conversão **irreversível** de energia mecânica na seção (1) em energia térmica não desejada e **a perda de energia por transferência de calor**.

$$\underbrace{\left(\alpha\frac{V_1^2}{2}+gz_1+pv_1\right)-\left(\alpha\frac{V_2^2}{2}+gz_2+p_2v_2\right)}=\underbrace{\frac{\dot{W}}{\dot{m}}}+\overbrace{(u_2-u_1)-\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}}$$

Energia mecânica por unidade de massa em cada seção transversal do escoamento

representa a potência de eixo (por unidade de massa) fornecida (bomba) ou retirada do fluido (turbina)

Equação de Bernoulli

- Equação da Energia para Fluido Ideal
  - Hipóteses de Simplificação
    - Regime permanente
    - Sem a presença de máquina (bomba/turbina). Trabalho de eixo
    - Sem perdas por atrito
    - Fluido incompressível
    - Sem trocas de calor
    - Propriedades uniformes nas seções

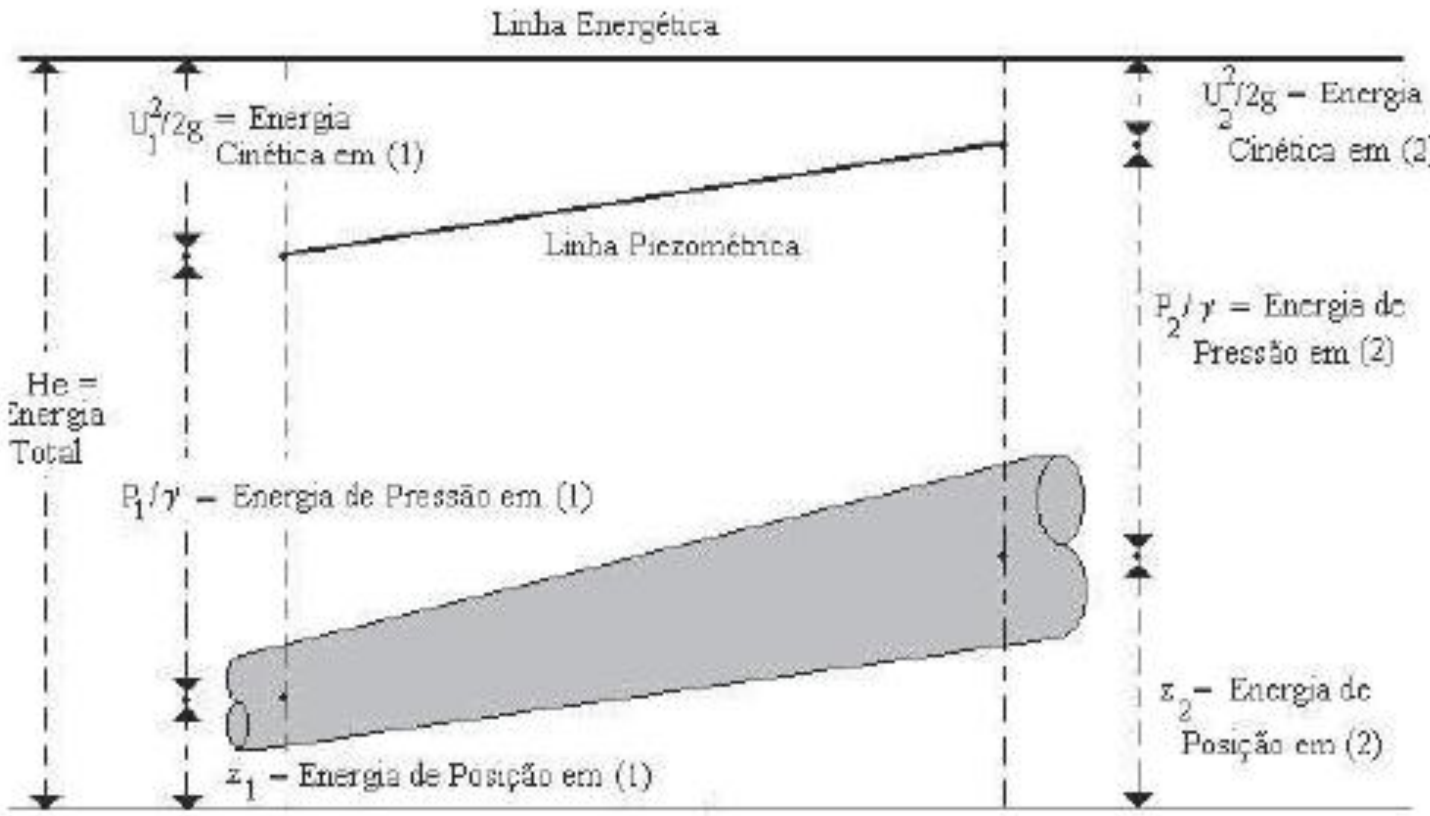
$$\left(\alpha\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + pv_1\right) - \left(\alpha\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + p_2v_2\right) = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} + (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

$$\boxed{\left(\alpha\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + pv_1\right) = \left(\alpha\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + p_2v_2\right)}$$

$$\left(gz + p\upsilon + \alpha\frac{\overline{V}^2}{2}\right) = H = constante$$

Energia Cinética: É o estado de energia determinado pelo movimento do fluido.
Energia Potencial: É o estado de energia do sistema devido a sua posição no campo da gravidade em relação a um plano horizontal de referência.
Energia de Pressão: Corresponde ao trabalho potencial das forças de pressão que atuam no escoamento do fluido.

Visualização gráfica da equação de Bernoulli



Aplicações da Equação de Bernoulli

- Teorema de Torricelli
- Medidores de vazão:
- Tubo de Venturi
- Tubo de Pitot
- Pressão de estagnação

Equação da energia para fluidos reais perda de carga:

representa a conversão **irreversível** de energia mecânica na seção (1) em energia térmica não desejada e **a perda de energia por transferência de calor**.

$$\underbrace{\left(\alpha\frac{V_1^2}{2}+gz_1+pv_1\right)-\left(\alpha\frac{V_2^2}{2}+gz_2+p_2v_2\right)}=\underbrace{\frac{\dot{W}}{\dot{m}}}+\overbrace{(u_2-u_1)-\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}}$$

Energia mecânica por unidade de massa em cada seção transversal do escoamento

representa a potência de eixo (por unidade de massa) fornecida (bomba) ou retirada do fluido (turbina)

$$\frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\overline{V}_2^2}{2g} = \frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + \Delta H_p$$

Este último termo é denominado perda de carga, (ΔH_P) que é a energia por unidade de peso do líquido, dissipada em forma de calor devido à viscosidade e ao desvio de massa pelos acessórios e, quando turbulento o regime de escoamento, pela rugosidade

A perda de carga ΔH_P *depende*

- *Da rugosidade (ε)*
- *Do comprimento (L) da tubulação*
- *D*a presença de acessórios e conexões no sistema.

A perda de carga total é, portanto, a soma da **perda de carga contínua (devida ao atrito do escoamento com as paredes** ao longo da tubulação com a **perda de carga local** devido aos acessórios, conexões, mudanças de área e outros